Het vullen van theaters in coronatijd

De coronapandemie en de bijbehorende maatregelen hebben grote gevolgen voor vele aspecten van het dagelijkse leven. In het bijzonder is het bezoeken van een theater geen vanzelfsprekendheid meer. Door de beperkende maatregelen omtrent het aantal mensen in een ruimte en door de anderhalvemetermaatregel is het voor veel theaters puzzelen om zo veel mogelijk bezoekers te kunnen verwelkomen in hun zalen. Hoewel de sector middels creatieve ideeën zoveel mogelijk mensen probeert te bereiken, blijft een ouderwets fysiek bezoek aan het theater een geliefde optie. Met wiskundige technieken analyseren we wat er mogelijk is binnen het 'nieuwe normaal'.

Foto: Mark Williams via Unsplash

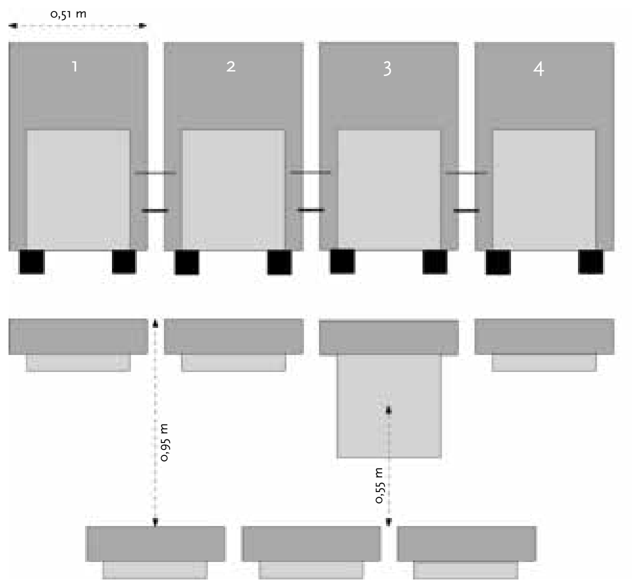
Danny Blom, Rudi Pendavingh & Frits Spieksma

Sinds SARS-CoV-2 eind 2019 zijn ongewenste entree maakte op het wereldpodium, zijn er verschillende pogingen geweest om de verspreiding van het virus tegen te gaan. In het beleid van verschillende landen kwam dit neer op het beperken van sociale contacten, bijvoorbeeld door het sluiten van horecagelegenheden en het drastisch inperken van de capaciteit van theaters. Tijdens de eerste golf van de coronapandemie in Nederland waren theatervoorstellingen zelfs verboden, totdat de restricties in juni 2020 werden versoepeld tot maximaal 30 bezoekers per zaal. Dit was echter in geen geval genoeg voor theaters om rendabel voorstellingen te kunnen laten opvoeren. Gaandeweg zijn de maatregelen dusdanig versoepeld dat theaters alleen nog maar gebonden waren aan de onderlinge anderhalve meter afstand tussen bezoekers die tot verschillende huishoudens behoren. De onderstaande wiskundige technieken zijn gebaseerd op deze setting waarin dus alleen *social distancing* een beperkende rol speelt.

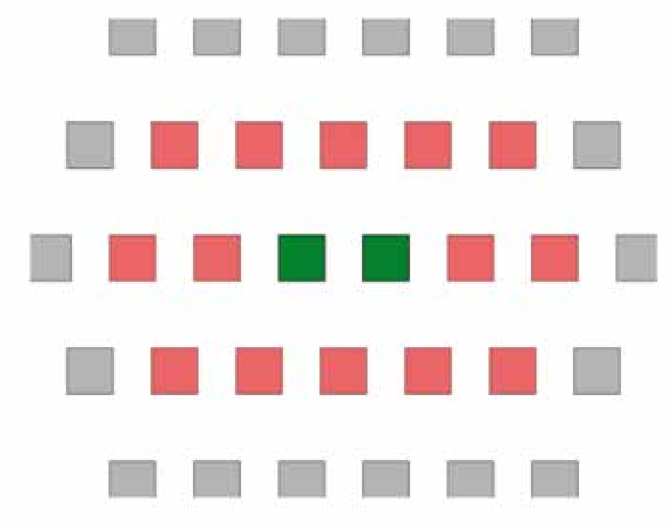
Onze analyse is gebaseerd op de zalen van het Muziekgebouw Frits Philips Eindhoven, een theater met twee zalen: de Grote Zaal (1.250 stoelen), vooral geschikt voor klassieke concerten en symfonieorkesten, en de Kleine Zaal (400 stoelen) die zich vooral leent voor kamermuziekconcerten in een intieme setting.

Zaaleigenschappen Muziekgebouw Frits Philips Eindhoven

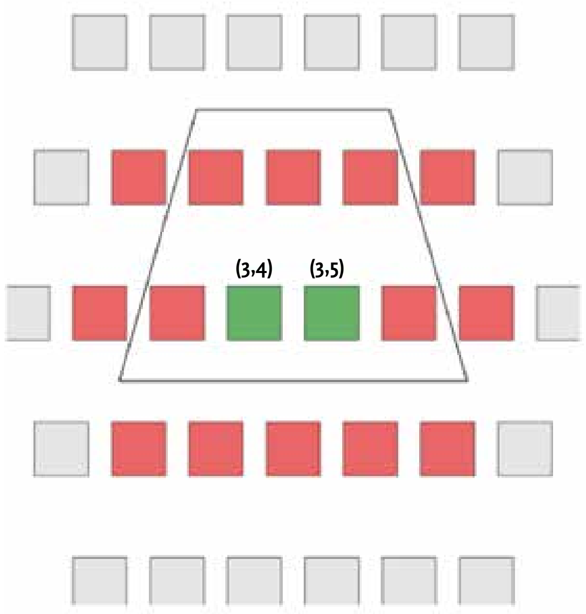
Voordat we kunnen gaan kijken naar wiskundige technieken om het aantal bezoekers te optimaliseren binnen de coronaregels, moeten we eerst eigenschappen van de stoelenconfiguratie in de zaal bestuderen. Figuur 1 geeft een schematische weergave van het boven- en vooraanzicht van stoelen in het Muziekgebouw Eindhoven, met de bijbehorende afmetingen van de stoelen. De stoelen in opeenvolgende rijen staan in een zigzagpatroon, zodat het zicht van bezoekers verder achterin de zaal zo min



Figuur 1. Voor- en bovenaanzicht van stoelen in Muziekgebouw Eindhoven



Figuur 2. Als een familie van twee de groene stoelen bezet, mogen andere families niet op de rode stoelen plaatsnemen



Figuur 3. De unieke trapezoide behorende bij een paar op stoelen (3,4) en (3,5)

mogelijk wordt geblokkeerd.

Personen die tot hetzelfde huishouden behoren, noemen we een familie; die hoeven niet anderhalve meter uit elkaar te zitten. We gaan ervan uit dat leden van een familie opeenvolgende stoelen bezetten in dezelfde rij. Het aantal leden van een familie noemen we de grootte van de familie. Met behulp van de gegevens uit figuur 1 kunnen we voor iedere bezoekende familie bepalen welke stoelen 'verboden gebied' zijn voor bezoekers van een andere familie (zie figuur 2 voor een familie van twee).

Trapezoides

Het doel van het optimaliseringsprobleem dat we hier willen oplossen is om zoveel mogelijk bezoekers toe te kunnen wijzen aan stoelen in de theaterzaal. Dit probleem is een zogenaamd *packing* probleem; in dit geval gaat het om een gewogen *packing* van families, waarbij het gewicht van elke familie de familiegrootte is. Voor het Muziekgebouw Eindhoven levert dit abstracte probleem een mooie meetkundige interpretatie op. Met elke familie en elke verzameling stoelen die door een familie bezet kan worden, kan een unieke trapezoide geassocieerd worden; zie figuur 3 voor een illustratie.

We introduceren deze trapezoides om de volgende reden: een toewijzing van families aan stoelen die voldoet aan de anderhalvemeterregel, is equivalent met een *packing* van de bijbehorende trapezoides (Blom et al., 2020). Dit inzicht stelt ons in staat om het probleem op heldere wijze te formuleren: het doel van ons probleem is dus om een verzameling trapezoides te vinden zodanig dat elk paar trapezoides niet overlapt en waarbij de som van de familiegroottes behorende bij deze trapezoides zo groot mogelijk is.

Een andere manier om naar dit probleem te kijken is door het te vertalen naar een graafprobleem. In deze graaf vertegenwoordigt iedere plaatsing van een familie een knoop in de graaf, en er bestaat een kant tussen twee knopen bestaat wanneer deze twee families niet tegelijkertijd geplaatst kunnen worden. Het doel komt nu overeen met het vinden van een maximum gewogen stabiele verzameling van knopen (maximum *weight stable set problem*).

Klantprofielen

Wanneer men, zonder verdere informatie over de grootte van families, het trapezoidemodel zou doorrekenen voor de zalen van Muziekgebouw Eindhoven, zullen er in een optimale zaalbezetting voornamelijk relatief grote families voorkomen. De reden hiervoor is duidelijk: de ratio van het aantal bezette stoelen door een familie en het aantal stoelen in de verboden zone, is groter voor grote families dan voor kleinere families. Maar aangezien de grootte van de families die een theater bezoeken niet door het theater bepaald wordt, introduceren we het begrip klantprofielen. Een klantprofiel specificeert voor elk familiegrootte het percentage families van die grootte die de voorstelling komen bezoeken. Zo kunnen we bij elke voorstelling een geschikt klantprofiel kiezen, en geven we aan het algoritme een parameter mee die ervoor zorgt de gevonden stoelbezetting bij benadering voldoet aan een geschikte verdeling van familiegroottes.

Implementatie

Het wiskundige model (gebaseerd op het vinden van een maximum gewogen stabiele verzameling in een graaf), kan door middel van een lineaire doelfunctie en lineaire beperkingen als een geheeltallig programmeringsprobleem (integer programming, ook wel IP) worden beschreven (Blom et al., 2020). Met behulp van het commerciële softwarepakket Gurobi hebben we het bovenstaande trapezoidemodel geïmplementeerd, en doorgerekend voor de Grote en Kleine Zaal van het Muziekgebouw Eindhoven. Hierbij is uitgegaan van vier verschillende scenario's voor het klantprofiel, namelijk:

- MGE1: 18% singles, 70% tweetallen, 6% drietallen, 6% viertallen
- MGE2: 100% tweetallen
- MGE3: 20% singles, 80% tweetallen
- MGE4: 50% tweetallen, 50% viertallen.

Een standaardformulering van het stable set probleem is met behulp van Gurobi binnen enkele seconden op te lossen voor inputgroottes die horen bij deze twee zalen. Het toevoegen van de klantprofielen aan deze formulering maakt het probleem echter moeilijker. Een *stable set* probleem is op te lossen als een lineair programmingsprobleem wanneer er een volledige beschrijving beschikbaar is van het convexe omhulsel van alle binaire vectoren die een *stable set* karakteriseren, in termen van lineaire ongelijkheden. De standaard IP-formulering bevat slechts een klein deel van al deze lineaire ongelijkheden. Door het toevoegen van extra lineaire ongelijkheden is het mogelijk dat het resulterende geheeltallige programma makkelijker oplosbaar is, bijvoorbeeld omdat er sterkere bovengrenzen worden gevonden in het branch-and-bound algoritme. Naast de standaardimplementatie hebben we daarom een subklasse van zogenaamde *clique constraints* toegevoegd aan het geheeltallig programma. De toegevoegde ongelijkheden houden concreet in dat voor elk drietal stoelen geldt dat van alle trapezoiden die twee van deze drie stoelen bevatten, er slechts één trapezoide kan worden gekozen. De correctheid van deze ongelijkheden volgt uit het duiventilprincipe.

Meerdere opeenvolgende shows

In tabel 1 geven we de resultaten weer voor het trapezoide model. De kolom '% cap' bevat het percentage gevulde stoelen in vergelijking met de volledige capaciteit (de bezettingsgraad), en de kolommen 'standaard (s)' en 'versterkt (s)' respectievelijk bevatten de rekentijden (in seconden) voor de standaard en de versterkte formulering.

Zoals te zien in tabel 1, ligt de bezettingsgraad rond de 33%, waarbij voorstellingen met klantprofielen met relatief veel grote families tot 37% scoren. Echter, de meeste theaters kunnen met deze bezettingsgraden niet rendabel functioneren. Vandaar dat er gekeken is naar de mogelijkheid om een voorstelling meerdere malen achter elkaar op te voeren, telkens voor een verschillend publiek. Het in goede banen leiden van binnenkomend en weggaand publiek, vergt dan wel een grote inzet van het theaterpersoneel, en het schoonmaken van de stoelen tussen twee van zulke voorstellingen is niet meer mogelijk. We zijn dus op zoek naar oplossingen waarbij elke stoel slechts tijdens één van deze voorstellingen op een avond bezet kan worden. Hierdoor hoeven stoelen niet tussentijds te worden schoongemaakt door het personeel. Deze beperking blijkt relatief eenvoudig te modelleren met behulp van lineaire ongelijkheden.

Door het uitbreiden van het model vanwege het toelaten van meerdere opeenvolgende voorstellingen, worden symmetrieën toegevoegd aan het model. Als er twee stoelbezettingen gevonden worden voor voorstelling 1 en voorstelling 2 onder de juiste restricties, dan zou men deze bezettingen ook kunnen omwisselen en dan zou dit nog steeds een toelaatbare oplossing zijn. Dit noemen

KLANTPROFIEL	Grote Zaal			Kleine Zaal		
	% cap	standaard (s)	versterkt (s)	% cap	standaard (s)	versterkt (s)
MGE1	32	3,39	1,50	34	1,19	0,41
MGE2	29	0,28	0,10	31	0,02	0,02
MGE3	30	1,39	0,97	31	0,22	0,07
MGE4	36	5,29	1,10	37	0,08	0,11

Tabel 1. Resultaten van het trapezoide model met een standaard en versterkte IP-formulering

KLANTPROFIEL	Grote Zaal			Kleine Zaal		
	% cap	standaard (s)	versterkt (s)	% cap	standaard (s)	versterkt (s)
MGE1	63	532,69	48,28	64	8,18	13,82
MGE2	56	6,67	2,49	58	0,30	0,35
MGE3	58	2107,68	6,05	59	2,19	0,89
MGE4	70	4485,33	726,11	70	5,46	9,17

Tabel 2. Resultaten van het trapezoide model voor twee voorstellingen met een standaard en versterkte IP-formulering

we symmetrische oplossingen. Gelukkig bestaan er zogenaamde technieken om symmetrieën te breken, zoals opnieuw het toevoegen van lineaire beperkingen waaraan slechts één van de symmetrische oplossingen voldoet. In tabel 2 beschrijven we gelijksoortige resultaten voor het geval van twee opeenvolgende voorstellingen. De versterkte formulering maakt hier gebruik van zowel de extra clique constraints als de symmetriebrekende technieken.

De resultaten in tabel 2 laten zien dat de bezettingsgraden ruwweg verdubbelen bij het introduceren van een extra show. Dit is een belangrijke observatie omdat hiermee aangetoond wordt dat commerciele exploitatie van een theater in principe mogelijk is, ook in tijden van corona, wanneer een show twee keer opgevoerd kan worden.

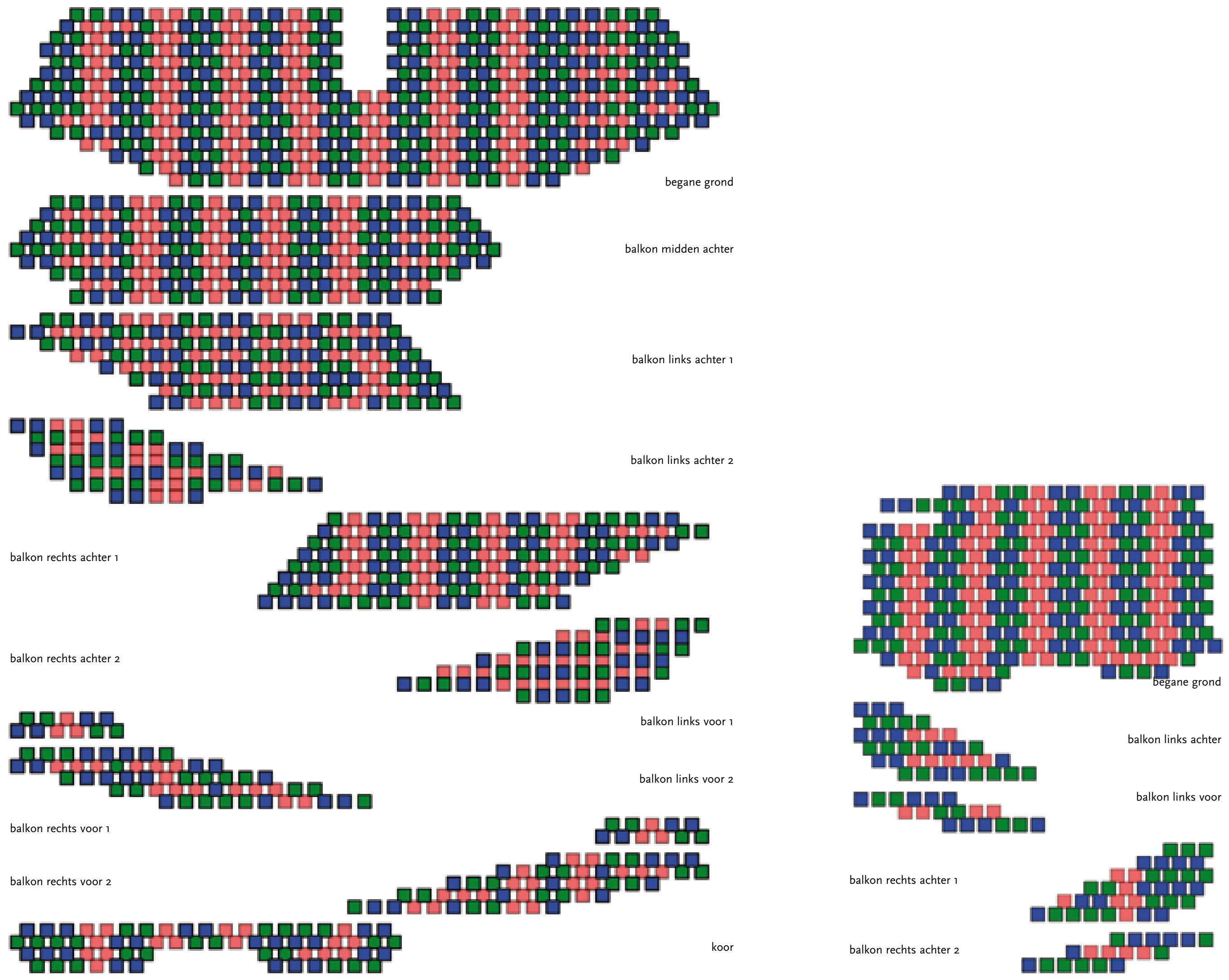
We zien wel dat de rekentijden voor deze situatie snel toenemen, met name voor de Grote Zaal. Dit is niet verrassend, omdat het aantal variabelen en beperkingen snel groeit wanneer het aantal voorstellingen toeneemt. We zien ook, in de kolom 'versterkt (s)', dat het toevoegen van extra ongelijkheden aan het model leidt tot een significante afname in de rekentijd. Het belang van een korte rekentijd volgt uit het feit dat voor verschillende muziekgenres zeer waarschijnlijk verschillende klantprofielen gebruikt moeten worden, omdat de samenstelling van het publiek heel verschillend kan zijn. Daarnaast is het met korte rekentijden ook eerder mogelijk om zogenaamde online algoritmes te kunnen implementeren. Bij dergelijke methodes hoeft een klantprofiel niet als input gebruikt te worden, maar kunnen de continu binnenkomende reserveringen gebruikt worden om het klantprofiel dynamisch aan te passen, om zo tot een optimale bezetting te komen.

Wat als we niet alle rijen gebruiken?

Als we de stoelbezettingen uit figuur 4 bekijken, dan zien we dat voor beide voorstellingen, in bijna elke rij stoelen wel minstens één familie plaats kan nemen. Dit leidt tot een complexe logistieke operatie: hoe kan het theaterpersoneel ervoor zorgen dat de families in de juiste volgorde de zaal binnenkomen zonder dat ze binnen anderhalve meter van andere families moeten komen? Als alternatief beschouwen we een situatie waarbij de rijen alternerend gebruikt worden, bijvoorbeeld er mogen alleen families plaats nemen in rijen 1, 3, 5, etc.. De resultaten in tabel 3 geven weer dat de resulterende bezettingsgraad met ongeveer 5% daalt wanneer deze strategie wordt gebruikt in een theater. Daarentegen is het natuurlijk wel zo dat het naar binnen en buiten leiden van bezoekers veel eenvoudiger is, omdat de theaterzaal nu makkelijk van binnen naar buiten gevuld kan worden met bezoekers.

KLANTPROFIEL	Grote Zaal			Kleine Zaal		
	% cap	% verlies	rekentijd (s)	% cap	% verlies	rekentijd (s)
MGE1	57	-9,4	0,33	58	-9,8	0,11
MGE2	52	-7,5	0,05	52	-9,6	0,01
MGE3	52	-9,8	0,07	52	-11,8	0,08
MGE4	65	-6,0	0,12	66	-5,7	0,03

Tabel 3. Resultaten van het trapezoide model voor twee voorstellingen met een standaard en versterkte IP formulering in geval van alternerende rijen



Figuur 4. Stoelbezettingen voor de zalen van Muziekgebouw Eindhoven met twee voorstellingen; de groene stoelen worden gebruikt tijdens de eerste voorstelling (Grote Zaal 391, Kleine Zaal 129) de blauwe tijdens de tweede (Grote Zaal 393, Kleine Zaal 126)

Conclusie

Al met al concluderen we dat, als een voorstelling twee keer op een avond gespeeld wordt, er een bezettingsgraad van 60-70% mogelijk is, wanneer we rekening moeten houden met de anderhalvemetermaatregel. Verder leidt het gebruik van alternerende rijen tot een (bescheiden) negatief effect op de maximale bezettingsgraad. Deze analyse geeft het Muziekgebouw Eindhoven de mogelijkheid om een weloverwogen besluit te kunnen nemen over de tradeoff tussen het maximaliseren van de bezettingsgraad en het minimaliseren van de complexiteit van het begeleiden van bezoekersstromen in de theaterzalen. Hierbij heeft het Muziekgebouw Eindhoven gekozen om de strategie van alternerend gebruik van rijen te implementeren in hun zalen. Daarnaast zijn er zeker mogelijkheden voor vervolgonderzoek, voornamelijk voor het nog realistischer in acht nemen van daadwerkelijke verdeling van familiegroottes, bijvoorbeeld door te kijken naar onlinemethodes voor stoelbezettingen.

We danken de medewerkers van Muziekgebouw Eindhoven voor de prettige samenwerking.

Zie voor een uitgebreide versie van deze bijdrage het artikel *Filling a theatre in times of corona* van D. Blom, R. Pendavingh en F. C. R Spieksma. arXiv:2010.01981, 30 september 2020.

Danny Blom is promovendus Combinatorial Optimization at Eindhoven University of Technology
E-mail: d.a.m.p.blom@tue.nl

Rudi Pendavingh is assistent professor Combinatorial Optimization at Eindhoven University of Technology
E-mail: r.a.pendavingh@tue.nl

Frits Spieksma is professor Combinatorial Optimization at Eindhoven University of Technology
E-mail: f.c.r.spieksma@tue.nl